2025年全国硕士研究生招生考试试题

（数学一）

（科目代码：301）

一、选择题:1～10 小题,每小题 5 分,共 50 分,下列每题给出的四个选项中,只有一个选项是符合题目

要求的，请将所选选项前的字母填在答题卡指定位置.

(1) 已知函数 $f(x)=\int_0^x e^{t^2}\sin t dt$， $g(x)=\int_0^x e^{t^2}dt\cdot\sin^2 x$， 则

(A) $x=0$ 是 $f(x)$ 的极值点， 也是 $g(x)$ 的极值点

(B) $x=0$ 是 $f(x)$ 的极值点，$(0,0)$ 是曲线 $y=g(x)$ 的拐点

(C) $x=0$ 是 $f(x)$ 的极值点，$(0,0)$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

(D) $(0,0)$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点， 也是曲线 $y=g(x)$ 的拐点

(2) 已知级数：①$\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n^3\pi}{n^2+1}$； ②$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}-\tan\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}})$， 则

(A) ①与②均条件收敛 (B) ①条件收敛， ②绝对收敛

(C) ①绝对收敛， ②条件收敛 (D) ①与②均绝对收敛

(3) 设数 $f(x)$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上可导， 则

(A) 当 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 存在时， $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)$ 存在 (B) 当 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)$ 存在时，$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 存在

(C) 当 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x f(t)dt}{x}$ 存在时，$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 存在 (D) 当 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 存在时，$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x f(t)dt}{x}$ 存在

(4) 设函数 $f(x,y)$ 连续， 则 $\int_{-2}^{2}dx\int_{4-x^2}^{4}f(x,y)dy=$

(A) $\int_0^4[\int_{-2}^{-\sqrt{4-y}}f(x,y)dx+\int_{\sqrt{4-y}}^{2}f(x,y)dx]dy$

(B) $\int_0^4[\int_{-2}^{\sqrt{4-y}}f(x,y)dx+\int_{\sqrt{4-y}}^{2}f(x,y)dx]dy$

(C) $\int_0^4[\int_{-2}^{-\sqrt{4-y}} f(x,y)dx+\int_2^{\sqrt{4-y}} f(x,y)dx]dy$

(D) $2\int_0^4 dy[\int_{\sqrt{4-y}}^2 f(x,y)dx$

(5) 二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_1x_2+2x_1x_3$ 的正惯性指数为

(A) 0　　(B) 1

(C) 2　　(D) 3

(6) 设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 是 n 维向量，α_1,α_2 线性无关，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关，且 $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_4=0$，在空间直角坐标系 $O-xyz$ 中，关于 x,y,z 的方程组 $x\alpha_1+y\alpha_2+z\alpha_3=\alpha_4$ 的几何图形是

(A)过原点的一个平面　　(B) 过原点的一条直线

(C)不过原点的一个平面　　(D) 不过原点的一条直线

(7) 设 n 阶矩阵 A,B,C 满足 $r(A)+r(B)+r(B)=r(ABC)+2n$，给出下列四个结论：① $r(ABC)+n=r(AB)+r(C)$；② $r(AB)+n=r(A)+r(B)$；③ $r(A)=r(B)=r(C)=n$；④ $r(AB)=r(BC)=n$，其中正确的选项是

(A) ①②　　(B) ①③

(C) ②④　　(D) ③④

(8) 设二维随机变量 (X,Y) 服从正态分布 $N(0,0;1,1;P)$，其中 $P\in(-1,1)$，若 a,b 为满足 $a^2+b^2=1$ 的任意实数，则 $D(aX+bY)$ 的最大值为

(A) 1　　(B) 2

(C) $1+|P|$　　(D) $1+P^2$

(9) 设 $X_1,X_2,\ldots,X_{20}$ 是来自总体 $B(1,0.1)$ 的简单随机样本，令 $T=\sum_{i=1}^{20}X_i$，利用泊松分布近似表示二项分布的方法可得 $P\{T\le 1\}\approx$

(A) $\frac{1}{e^2}$　　(B) $\frac{2}{e^2}$

(C) $\frac{3}{e^2}$ (D) $\frac{4}{e^2}$

(10) 设$x_1,x_2,\cdots,x_n$为来自正态总体$N(\mu,2)$的简单随机样本，记$\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$，$Z_\alpha$表示标准正态分布的上侧$\alpha$分位数，假设检验问题：$H_0:\mu\le 1,H_1:\mu>1$的显著性水平为$\alpha$的检验的拒绝域为

(A) $\left\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\middle|\bar{X}>1+\frac{2}{n}Z_\alpha\right\}$ (B) $\left\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\middle|\bar{X}>1+\frac{\sqrt{2}}{n}Z_\alpha\right\}$

(C) $\left\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\middle|\bar{X}>1+\frac{2}{\sqrt{n}}Z_\alpha\right\}$ (D) $\left\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\middle|\bar{X}>1+\sqrt{\frac{2}{n}}Z_\alpha\right\}$

二、填空题:11～16 小题，每小题 5 分，共 30 分.

(11) $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{x^x-1}{\ln x\cdot\ln(1-x)}=$__________.

(12) 已知函数$f(x)=\begin{cases}0, & 0\le x<\frac{1}{2}\\ x^2, & \frac{1}{2}\le x\le 1\end{cases}$的傅里叶级数为$\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin n\pi x$，$S(x)$为$\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin n\pi x$的和函数,则$S\left(-\frac{7}{2}\right)=$__________.

(13) 已知函数$U(x,y,z)=xy^2z^3$，向量$n=(2,2,-1)$，则$\left.\frac{\partial v}{\partial n}\right|_{(1,1,1)}=$__________.

(14) 已知有向曲线L是沿抛物线$y=1-x^2$从点$(1,0)$到$(-1,0)$的段，则曲线积分

$\int_L(y+\cos x)dx+(2x+\cos y)dy=$__________.

(15) 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}4 & 2 & -3\\ a & 3 & -4\\ b & 5 & -7\end{pmatrix}$，若方程组 $A^2X=0$ 与 $AX=0$ 不同解，则 $a-b=$________.

(16) 设 A,B 为两个不同随机事件，且相互独立，已知 $P(A)=2P(B),P(A\cup B)=\frac{5}{8}$，则 A,B 中至少有一个发生的条件下，A,B 中恰好有一个发生的概率为________.

三、解答题:17～22 小题，共 70 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(17) (本题满分 10 分)

计算 $\int_0^1 \frac{1}{(x+1)(x^2-2x+2)}dx.$

(18) (本题满分 12 分)

已知函数 $f(u)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 内具有二阶导数，记 $g(x,y)=f\left(\frac{x}{y}\right)$，若 $g(x,y)$ 满足

$x^2\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}+xy\frac{\partial^2 g}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}=1$，且 $g(x,x)=1$，$\left.\frac{\partial g}{\partial x}\right|_{(x,x)}=\frac{2}{x}$，求 $f(u)$.

(19) (本题满分 12 分)

设函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内可导，证明：导函数 $f'(x)$ 在 (a,b) 内严格单调增加的充分必要条件是：对 (a,b) 内任意的 x_1,x_2,x_3，当 $x_1<x_2<x_3$ 时，

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}<\frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$$

(20) (本题满分 12 分)

设Σ是由直线$\begin{cases}x=0\\y=0\end{cases}$绕直线$\begin{cases}x=t\\y=t\\z=t\end{cases}$（$t$为参数）旋转一周得到的曲面，$\Sigma_1$是$\Sigma$介于平面

$x+y+z=0$ 与 $x+y+z=1$ 之间部分的外侧，计算曲面积分

$$\iint\limits_{\Sigma_1} xdydz+(y+1)dzdx+(z+2)dxdy$$

(21) (本题满分 12 分) 设矩阵$A=\begin{pmatrix}0&-1&2\\-1&0&2\\-1&-1&a\end{pmatrix}$，已知1是$A$的特征多项式的重根

(1)求a的值

(2)求所有满足$A\alpha=\alpha+\beta$，$A^2\alpha=\alpha+2\beta$的非零列向量α，β

(22) (本题满分 12 分)

投保人的损失事件发生时，保险公司的赔付额Y与投保人的损失额X的关系为

$Y=\begin{cases}0,X\le 100\\X-100,X>100\end{cases}$，设损失事件发生时，投保人的损失额$X$的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2\times 100^2}{(100+x)^3},x>0\\0,x\le 0\end{cases}$$

(1)求$P\{Y>0\}$及$E(Y)$

(2)这种损失事件在一年内发生的次数记为N,保险公司在一年内就这种损失事件产生的理赔次数记为M,假设N服从参数为8的泊松分布，在$N=n(n\geq 1)$的条件下，M服从二项分布$B(n,P)$，其中$P=P\{Y>0\}$,求M的概率分布.

一、选择题:1～10 小题,每小题 5 分,共 50 分,下列每题给出的四个选项中,只有一个选项是符合题目要求的，请将所选选项前的字母填在答题卡指定位置.

(1) B $x=0$ 是 $f(x)$ 的极值点, $(0,0)$ 是曲线 $y=g(x)$ 的拐点

(2) B ①条件收敛,②绝对收敛

(3) D 当 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 存在时， $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_0^x f(t)dt}{x}$ 存在

(4) A $\int_0^4 [\int_{-2}^{-\sqrt{4-y}} f(x,y)dx+\int_{\sqrt{4-y}}^{2} f(x,y)dx]dy$

(5) B 1

(6) D 不过原点的一条直线

(7) A ①②

(8) C $1+|P|$

(9) C $\dfrac{3}{e^2}$

(10) D $\left\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\middle|\bar{X}>1+\sqrt{\dfrac{2}{n}}Z_\alpha\right\}$

二、填空题:11～16 小题，每小题 5 分，共 30 分.

(11) -1

(12) $\dfrac{1}{8}$

(13) 1

(14) $\dfrac{4}{3}-2\sin 1$

(15) -4

(16) $\dfrac{4}{5}$

三、解答题:17～22 小题，共 70 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(17) $\dfrac{3}{10}\ln 2+\dfrac{\pi}{10}$

(18) $f(u)=\dfrac{1}{2}(\ln u)^2+2\ln u+1$

(19) 证明题

(20) $\dfrac{2\sqrt{3}\pi}{9}-\dfrac{8\sqrt{2}\pi}{3}$

(21) (1) $a=3$.

(2) $\alpha=(k_1,k_2,k_3)^T$，其中 k_1,k_2,k_3 不全为0，

$\beta=(k,k,k)^T$，其中 $k\neq 0$.

(22) (1) $P\{Y>0\}=P\{Y>0,X\le 100\}+P\{Y>0,X>100\}=\int_{100}^{+\infty}\dfrac{2\times 100^2}{(x+100)^3}dx=\dfrac{1}{4}$

$E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}g(x)f(x)dx=\int_{100}^{+\infty}(x-100)\dfrac{2\times 100^2}{(x+100)^3}dx=50$；

(2)由题知， $N\sim P(8)$, $P\{M=m\mid N=n\}=\mathrm{C}_n^m p^m(1-p)^{n-m}$，

由概率乘法公式，$P\{M=m,N=n\}=P\{N=n\}P\{M=m\mid N=n\}=\dfrac{8^n e^{-8}}{n!}C_n^m p^m(1-p)^{n-m}$ ($m=0,1,2,\cdots,n$，$n=0,1,2,\cdots$， $m\le n$)

所以 M 的概率分布为 $P\{M=m\}=\sum\limits_{n=m}^{\infty}P\{M=m,N=n\}=\sum\limits_{n=m}^{\infty}\dfrac{8^n e^{-8}}{n!}C_n^m p^m(1-p)^{n-m}$

$=\dfrac{e^{-8}8^m p^m}{m!}\sum\limits_{n=m}^{\infty}\dfrac{8^{n-m}}{(n-m)!}(1-p)^{n-m}=\dfrac{e^{-8}2^m}{m!}\sum\limits_{n=m}^{\infty}\dfrac{6^{n-m}}{(n-m)!}=\dfrac{e^{-2}2^m}{m!}$ ($m=0,1,2,\cdots,$).