2025年全国硕士研究生招生考试试题

（数学三）

（科目代码：303）

一、选择题:1～10 小题,每小题 5 分,共 50 分,下列每题给出的四个选项中,只有一个选项是符合题目要求的，请将所选选项前的字母填在答题卡指定位置.

(1) 当 $x \to 0^+$ 时，下列无穷小量中，与 x 等价的是（ ）

(A) $e^{-\sin x}-1$　　(B) $\sqrt{x+1}-\cos x$

(C) $1-\cos\sqrt{2x}$　　(D) $1-\dfrac{\ln(1+x)}{x}$

(2) 已知函数 $f(x)=\int_0^x e^{t^2}\sin t\mathrm{d}t$，$g(x)=\int_0^x e^{t^2}\mathrm{d}t\cdot\sin^2 x$，则( )

(A) $x=0$ 是 $f(x)$ 的极值点，也是 $g(x)$ 的极值点

(B) $x=0$ 是 $f(x)$ 的极值点，$(0,0)$ 是曲线 $y=g(x)$ 的拐点

(C) $x=0$ 是 $f(x)$ 的极值点，$(0,0)$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

(D) $(0,0)$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点，也是曲线 $y=g(x)$ 的拐点

(3)已知 k 为常数，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n[\frac{1}{n}-\ln(1+\frac{k}{n^2})]$ ( )

(A)绝对收敛　　(B)条件收敛

(C)发散　　(D)敛散性与 k 的取值相关

(4)设函数 $f(x)$ 连续，则 $\int_0^1 dy\int_0^y f(x)dx$ ( )

(A) $\int_0^1 xf(x)dx$　　(B) $\int_0^1(1+x)f(x)dx$

(C) $\int_0^1(x-1)f(x)dx$　　(D) $\int_0^1(1-x)f(x)dx$

(5) 已知 A 是 $m\times n$ 的矩阵，　β 是 m 维非零向量。若 A 有 k 阶非零子式，则（ ）

(A) 当 $k=m$ 时 $Ax=\beta$ 有解　　(B) 当 $k=m$ 时 $Ax=\beta$ 无解

(C) 当 $k<m$ 时 $Ax=\beta$ 有　　(D) 当 $k<m$ 时 $Ax=\beta$ 无解

(6) 设 A 为3阶矩阵，则“ A^3-A^2 可对角化”是“ A 可对角化”的（ ）

(A) 充分但不必要条件　　(B) 必要但不充分条件

(C) 充分必要条件　　(D) 既不充分也不必要条件

(7) 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&2\\-2&-a\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}1&0\\1&a\end{pmatrix}$，若 $f(x,y)=|xA+yB|$ 是正定二次型，则 a 的取值范围是（ ）

(A) $\left(0,2-\sqrt{3}\right)$　　(B) $\left(2-\sqrt{3},2+\sqrt{3}\right)$

(C) $\left(2+\sqrt{3},4\right)$　　(D) $\left(0,4\right)$

(8)设随机变量 X 服从正态分布 $N\left(-1,1\right)$，Y 服从正态分布 $N\left(1,2\right)$，若 X 与 $X+2Y$ 不相关，则 X 与 X - Y 的相关系数为（　　）

(A) $\frac{1}{3}$　　(B) $\frac{1}{2}$

(C) $\frac{2}{3}$　　(D) $\frac{3}{4}$

(9)设 $x_1,x_2\cdots x_{20}$ 是来自总体 $B\left(1,0.1\right)$ 的简单随机样本，令 $T=\sum_{i=1}^{20}x$，利用泊松分布近似表示二项分布的方法可得 $P\left\{T\le 1\right\}\approx$（　　）

(A) $\frac{1}{e^2}$　　(B) $\frac{2}{e^2}$

(C) $\frac{3}{e^2}$　　(D) $\frac{4}{e^2}$

(10) 设总体 X 的均匀分布为 $F\left(x\right)$，$X_1,X_2,\cdots X_n$,为来自总体 X 的简单随机样本，样本的经验分布函数为 $F_n\left(x\right)$，对于给定的 $x\left(0<F\left(x\right)<1\right)$，$D\left(F_n\left(x\right)\right)$=（　　）

(A) $F\left(x\right)\left(1-F\left(x\right)\right)$　　(B) $\left(F\left(x\right)\right)^2$

(C) $\frac{1}{n}F\left(x\right)\left(1-F\left(x\right)\right)$　　(D) $\frac{1}{n}\left(F\left(x\right)\right)^2$

二、填空题:11～16 小题，每小题 5 分，共 30 分.

(11) 设 $g\left(x\right)$ 是函数 $f\left(x\right)=\frac{1}{2}\ln\frac{3+x}{3-x}$ 的反函数，则曲线 $y=g\left(x\right)$ 的渐近线方程为__________.

(12) 设 $\int_1^{+\infty}\frac{a}{x(2x+a)}dx=\ln 2$，则 $a=$__________.

(13) 微分方程 $xy'-y+x^2e^x=0$ 满足条件 $y\left(1\right)=-e$ 的解为 $y=$__________.

(14) 已知函数 $z=z\left(x,y\right)$ 由 $z+\ln z-\int_y^x xe^{-t^2}\mathrm{d}t=1$ 确定，则 $\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{(1,1)}=$__________.

(15) 已知 $f(x)=\begin{vmatrix} 2x+1 & 3 & 2x+1 & 1 \\ 2x & -3 & 4x & -2 \\ 2x+1 & 2 & 2x+1 & 1 \\ 2x & -4 & 4x & -2 \end{vmatrix}$，$g(x)=\begin{vmatrix} 2x+1 & 1 & 2x+1 & 3 \\ 5x+1 & -2 & 4x & -3 \\ 0 & 1 & 2x+1 & 2 \\ 2x & -2 & 4x & -4 \end{vmatrix}$，则方程 $f(x)=g(x)$ 的不同的根的个数为__________.

(16) 设 A、B、C 为三个随机事件，且 A 与 B 相互独立，B 与 C 相互独立，A 与 C 互不相容，已知 $P(A)=P(C)=\dfrac{1}{4}$，$P(B)=\dfrac{1}{2}$，则在事件 A、B、C 至少有一个发生的事件下，A、B、C 中恰有一个发生的概率为__________.

三、解答题:17～22 小题，共 70 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(17) (本题满分 10 分)

计算 $\int_0^1 \dfrac{1}{(x+1)(x^2-2x+2)}dx.$

(18) (本题满分 12 分)

设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xf(x)-e^{2\sin x}+1}{\ln(1+x)+\ln(1-x)}=-3$，证明 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，并求 $f'(0)$.

(19) (本题满分 12 分)

已知平面有界区域 $D=\{(x,y)\,|\,y^2\le x, x^2\le y\}$，计算二重积分 $\iint\limits_D (x-y+1)^2 dxdy$.

(20) (本题满分 12 分)

设函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内可导，证明导函数 $f'(x)$ 在 (a,b) 内严格单调增加的充分必要条件是：对 (a,b) 内任意的 x_1,x_2,x_3，当 $x_1<x_2<x_3$ 时，$\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}<\dfrac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$.

(21) (本题满分 12 分)

设矩阵 $A=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -2 & -a & -1 \\ 1 & 1 & a & 2 & 3 \end{bmatrix}$ 的秩为 2.

(1) 求 a 的值.

(2) 求 A 的列向量组的一个极大线性无关组 α,β，并求矩阵 H，使得 $A=GH$，其中

$G=\left(\alpha,\beta\right)$.

(22) (本题满分 12 分)

投保人的损失事件发生时，保险公司的赔付额Y与投保人的损失额X的关系为:

$Y=\begin{cases}0, X\le 100\\ X-100, X>100\end{cases}$，设损失事件发生时，投保人的损失额$X$概率密度为:

$$f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{2\times 100^2}{\left(100+x\right)^3}, x>0\\ 0, \qquad x\le 0\end{cases}$$

(I) 求$P\left\{Y>0\right\}$及EY；

(II) 这种损失事件在一年内发生的次数记为N，保险公司在一年内就这种损失事件产生的理赔次数记为M。假设N服从参数为δ的泊松分布，在$N=n\left(n\ge 1\right)$的条件下，M服从二项分布$B\left(n,p\right)$，其中$p=P\left\{Y>0\right\}$，求M的概率分布.

一、选择题:1～10 小题,每小题 5 分,共 50 分,下列每题给出的四个选项中,只有一个选项是符合题目要求的，请将所选选项前的字母填在答题卡指定位置.

(1) **【答案】**(C) $1-\cos\sqrt{2x}$

(2) **【答案】**(B) $x=0$ 是 $f(x)$ 的极值点，$(0,0)$ 是曲线 $y=g(x)$ 的拐点

(3) **【答案】**(B)条件收敛

(4) **【答案】**(D) $\int_0^1(1-x)f(x)dx$

(5) **【答案】**(A) 当 $k=m$ 时 $Ax=\beta$ 有解

(6) **【答案】**(B) 必要但不充分条件

(7) **【答案】**(B) $\left(2-\sqrt{3},2+\sqrt{3}\right)$

(8) **【答案】**(D) $\frac{3}{4}$

(9) **【答案】**(C) $\frac{3}{e^2}$

(10) **【答案】**(C) $\frac{1}{n}F(x)\left(1-F(x)\right)$

二、填空题:11～16 小题，每小题 5 分，共 30 分.

(11) **【答案】**渐近线方程为 $y=3$ 和 $y=-3$.

(12) **【答案】** $a=2$

(13) **【答案】** $y=-xe^x$

(14) **【答案】** $\frac{1}{8e^2}$

(15) **【答案】** 2

(16) **【答案】** $\frac{2}{3}$

三、解答题:17～22 小题，共 70 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(17) **【答案】** $\frac{3}{10}\ln 2+\frac{\pi}{10}$

(18) **【答案】** $f(0)=2, f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-2}{x}=5$

(19) **【解析】** $\frac{71}{210}$

(21) **【解析】**(1) $a=1$；(2) $\alpha=(1,-1,1)^T$，$\beta=(-1,0,1)^T$，$H=\begin{bmatrix}1&0&2&1&1\\0&1&-1&1&2\end{bmatrix}$.

(22) **【解析】**(I) $P\{Y>0\}=\frac{1}{4}$，$E(Y)=50$；(II) $P\{M=m\}=\frac{e^{-2}2^m}{m!},m=0,1,2\cdots$