

2026 年全国硕士研究生招生考试数学二试题

一、选择题: 1~10 小题, 每小题 5 分, 共 50 分. 下列每题给出的四个选项中, 只有一个选项符合题目要求, 请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

1. 已知当 $x \rightarrow 0$ 时, $ax^2 + bx + \arcsin x$ 与 $\sqrt[3]{1+x^2} - 1$ 是等价无穷小, 则()

(A) $a = \frac{1}{3}, b = -1$

(B) $a = \frac{1}{3}, b = 1$

(C) $a = \frac{2}{3}, b = -1$

(D) $a = \frac{2}{3}, b = 1$

【答案】 (A)

2. 设 $y_1(x), y_2(x)$, 是某 2 阶非齐次线性微分方程的两个特解. 若常数 λ, μ 使得

$2\lambda y_1(x) + \mu y_2(x)$ 是该方程的解, $\lambda y_1(x) - 2\mu y_2(x)$ 是该方程对应的齐次方程的解, 则()

(A) $\lambda = \frac{1}{5}, \mu = \frac{2}{5}$

(B) $\lambda = \frac{2}{5}, \mu = \frac{1}{5}$

(C) $\lambda = \frac{1}{4}, \mu = \frac{1}{2}$

(D) $\lambda = \frac{1}{2}, \mu = \frac{1}{4}$

【答案】 (B)

3. 设 $z = z(x, y)$ 由方程 $x - az = e^{y+az}$ (a 是非零常数), 则 ()

(A) $\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{a}$

(B) $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{a}$

(C) $\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{1}{a}$

(D) $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{1}{a}$

【答案】 (A)

4. 线密度为 1 的线段, x 在 $(-1, 0)$ 和 $(1, 0)$ 之间, 质量为 m 的质点在 $(0, 1)$ 点, 求质点对线段的引力()

(A) $\int_0^1 \frac{2Gmx}{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}} dx$

(B) $\int_0^1 \frac{2Gm}{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}} dx$

(C) $\int_0^1 \frac{2Gmx}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} dx$

(D) $\int_0^1 \frac{2Gm}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} dx$

【答案】 (D)



5. 已知 $f(x)$ 在区间 $[-1,1]$ 内有定义, 则 ()

(A) 当 $f(x)$ 在 $(-1,0)$ 内单调递减, $(0,1)$ 内单调递增时, $f(0)$ 是极小值

(B) 当 $f(0)$ 是极小值时, $f(x)$ 在 $(-1,0)$ 内单调递减, $(0,1)$ 内单调递增

(C) 当 $f(x)$ 在区间 $[-1,1]$ 内是凹函数时, $\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$ 在 $[-1,1]$ 上单调递增

(D) 当 $\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$ 在 $[-1,1]$ 上单调递增时, $f(x)$ 在区间 $[-1,1]$ 内是凹函数

【答案】 (C)

6. 已知 $f(x) = \int_1^{x^2} \frac{e^t}{1+t^2} dt$, $g(x)$ 为 $f(x)$ 的反函数, 则 ()

(A) $g(0) = 1, g'(0) = \frac{3}{2}e$

(B) $g(0) = 1, g'(0) = \frac{2}{3e}$

(C) $g(1) = 0, g'(0) = \frac{3}{2}e$

(D) $g(1) = 0, g'(0) = \frac{2}{3e}$

【答案】 (B)

7. 设函数 $f(x, y)$ 在区域 $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ 上连续, 且 $f(x, y) = f(y, x)$,

则 $\iint_D f(x, y) d\sigma = ()$

(A) $2 \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \sum_{j=n+1-i}^n f\left(\frac{i}{n}, \frac{j}{n}\right) \frac{1}{n^2}$

(B) $\frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^n f\left(\frac{i}{n}, \frac{j}{n}\right) \frac{1}{n^2}$

(C) $2 \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{2n} \sum_{j=1}^{2n+1-i} f\left(\frac{i}{2n}, \frac{j}{2n}\right) \frac{1}{n^2}$

(D) $\frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{2n} \sum_{j=1}^i f\left(\frac{i}{2n}, \frac{j}{2n}\right) \frac{1}{n^2}$

【答案】 (D)

8. 单位阵经过若干次两行互换得到的矩阵为置换矩阵, 设 A 为 n 阶置换矩阵, A^* 为 A 的伴随矩阵, 则 ()

(A) A^* 为置换矩阵

(B) A^{-1} 为置换矩阵

(C) $A^* = A^{-1}$

(D) $A^* = -A^{-1}$

【答案】 (B)



9. 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ a & b \end{pmatrix}$, 若存在矩阵 B 满足 $AB = C$, 则()

(A) $a = -1, b = -1$

(B) $a = 2, b = 2$

(C) $a = -1, b = 2$

(D) $a = 2, b = -1$

【答案】(A)

10. 设 3 阶矩阵 A, B 满足 $AB + BA = A^2 + B^2$, 且 $A \neq B$ 则下列结论中错误的是()

(A) $(A - B)^3 = O$

(B) $A - B$ 只有零特征值

(C) A 和 B 不能都是对角矩阵

(D) $A - B$ 只有一个线性无关的特征向量

【答案】(D)

二、填空题: 11~16 小题, 每小题 5 分, 共 30 分. 请将答案写在答题纸指定位置上.

11. 已知 p 为实数, $\int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{x^p(1+x)} dx$ 收敛, 则 p 的取值范围_____.

【答案】 $0 < p < 2$

12. 极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{x} - \frac{\ln(1+x)}{x \sin x} \right] =$ _____.

【答案】 $\frac{1}{2}$

13. 求曲线 $x^2 + 2\sqrt{3}xy + y^2 = 1$ 在 $(0, 1)$ 处的曲率半径 $R =$ _____.

【答案】 4

14. $f(x, y)$ 可微, 且 $df(0, 0) = \pi dx + 3dy, g(x) = f(\ln x, \sin \pi x)$, 计算 $g'(1) =$ _____.

【答案】 -2π



15. 求 $f(x) = \ln(2+x)$ 在 $[0, 2]$ 上的平均值为 _____.

【答案】 $3\ln 2 - 1$

16. 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & b & -1 \\ a+2 & 3 & -3a \end{pmatrix}$, 二次型 $x^T A A^T x$ 的规范形为 y_1^2 , 则 $a+b =$ _____.

【答案】 2

三、解答题: 17~22 小题, 共 70 分. 请将解答写在答题纸指定位置上, 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (本题满分 10 分) 计算 $I = \int_{-1}^1 dx \int_{|x|}^{\sqrt{2-x^2}} y \sin \sqrt{x^2+y^2} dy$.

【解析】 设 D_1 是积分区域在第一象限内的部分, 则

$$\begin{aligned} I &= 2 \iint_{D_1} y \sin \sqrt{x^2+y^2} d\sigma = 2 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\sqrt{2}} r \sin \theta \cdot \sin r \cdot r dr \\ &= 2 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta d\theta \int_0^{\sqrt{2}} r^2 \cdot \sin r dr = \sqrt{2} \cdot (-r^2 \cos r + 2r \sin r + 2 \cos r) \Big|_0^{\sqrt{2}} = 4 \sin \sqrt{2} - 2\sqrt{2}. \end{aligned}$$

18. (本题满分 12 分) 设 $g(x)$ 连续, $f(x) = \int_0^{x^2} g(xt) dt$, 求 $f'(x)$ 表达式, 并判断 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性.

【解析】 $f(0) = 0$,

当 $x \neq 0$ 时, 令 $u = xt$, 则 $f(x) = \frac{1}{x} \int_0^{x^3} g(u) du$,

由导数定义得: $f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{x^3} g(u) du}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2 \cdot g(x^3)}{2x} = 0$

当 $x \neq 0$ 时, $f'(x) = \frac{g(x^3) \cdot 3x^3 - \int_0^{x^3} g(u) du}{x^2}$

由连续定义: $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x^3) \cdot 3x^3 - \int_0^{x^3} g(u) du}{x^2} = 0 - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{x^3} g(u) du}{x^2}$
 $= f'(0) = 0$, 故 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处连续.



19.(本题满分 12 分) 求函数 $f(x, y) = (2x^2 - y^2)e^x$ 的极值.

【解析】 令 $\begin{cases} f'_x = e^x(2x^2 + 4x - y^2) = 0 \\ f'_y = -2ye^x = 0 \end{cases}$, 解得: $(x, y) = (0, 0), (-2, 0)$

$$f''_{xx} = e^x(2x^2 + 8x + 4 - y^2), f''_{xy} = -2ye^x, f''_{yy} = -2e^x$$

$$(0, 0) \text{ 处: } A_1 = f''_{xx}(0, 0) = 4, B_1 = f''_{xy}(0, 0) = 0, C_1 = f''_{yy}(0, 0) = -2$$

$A_1C_1 - B_1^2 < 0$, 故 $(0, 0)$ 不是 $f(x, y)$ 的极值点;

$$(-2, 0) \text{ 处: } A_2 = f''_{xx}(-2, 0) = -4e^{-2}, B_2 = f''_{xy}(-2, 0) = 0, C_1 = f''_{yy}(-2, 0) = -2e^{-2}$$

$A_2C_2 - B_2^2 > 0, A_2 < 0$, 故 $f(-2, 0) = 8e^{-2}$ 是 $f(x, y)$ 的极大值.

20.(本题满分 12 分) 设 $M(x_0, y_0)$ 是曲线 $y = \frac{1}{1+x^2} (x \geq 0)$ 的拐点, O 为坐标原点, 区域 D 是第一象限中曲线 $y = \frac{1}{1+x^2} (x \geq x_0)$, 线段 OM 及 x 轴正半轴围成的无界区域, 求区域 D 绕 x 轴旋转所生产的旋转体的体积.

【解析】 $y' = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}, y'' = \frac{-2(1+x^2)^2 + 2x \cdot 2(1+x^2)2x}{(1+x^2)^4} = \frac{6x^2 - 2}{(1+x^2)^3}$, 在 $x \geq 0$ 范围内

$$\text{的拐点为 } (x_0, y_0) = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{3}{4} \right)$$

$$x = x_0 \text{ 左侧旋转体为锥, 其体积为 } V_1 = \frac{1}{3} \pi y_0^2 \cdot x_0 = \frac{\pi x_0}{3(1+x_0^2)^2} = \frac{\sqrt{3}}{16} \pi$$

$$x = x_0 \text{ 右侧旋转体的体积为 } V_2 = \int_{x_0}^{+\infty} \pi \frac{1}{(1+x^2)^2} dx$$

$$\text{令 } x = \tan t, \text{ 则 } V_2 = \pi \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = \frac{\pi}{2} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2t) dt = \frac{\pi^2}{6} + \frac{\pi}{4} \sin 2t \Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2}{6} - \frac{\sqrt{3}}{12} \pi$$

$$\text{故所求旋转体体积 } V = V_1 + V_2 = \frac{\pi^2}{6} - \frac{\sqrt{3}}{48} \pi.$$



21.(本题满分 12 分) 求微分方程 $x^2 y'' - 2xy' - (y')^2 = 0 (x > 2)$ 满足 $y|_{x=3} = \frac{1}{2}, y'|_{x=3} = -9$ 的解.

【解析】原方程可化为 $\frac{2xy' - x^2 y''}{(y')^2} = -1$, 得 $\left(\frac{x^2}{y'}\right)' = -1$

两边积分得: $\frac{x^2}{y'} = -x + C_1, y' = \frac{x^2}{C_1 - x}$, 由 $y'|_{x=3} = -9$ 得: $C_1 = 2$

故 $y = \int \frac{x^2}{2-x} dx = \int \frac{x^2 - 4 + 4}{2-x} dx = \int \left(\frac{4}{2-x} - x - 2\right) dx = -4 \ln(x-2) - \frac{x^2}{2} - 2x + C_2$

由 $y|_{x=3} = \frac{1}{2}$ 得 $C_2 = 11$, 故 $y = -4 \ln(x-2) - \frac{x^2}{2} - 2x + 11 (x > 2)$.

22.(本题满分 12 分) 设向量组 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \alpha_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$,

$A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4), G = (\alpha_1, \alpha_2)$,

(1) 证明 α_1, α_2 是 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 的一个极大无关组;

(2) 求 H , 满足 $A = GH$, 并求 A^{10} .

【解析】

(1) 由 $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

得 $r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = 2$ 且 α_1, α_2 线性无关, 故 α_1, α_2 是 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 的一个极大无关组;

(2) 解矩阵方程组 $GH = A$, 由

$(G:A) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$

解得: $\eta_1 = (1, 0)^T, \eta_2 = (0, 1)^T, \eta_3 = (-1, 1)^T, \eta_4 = (1, -1)^T$



$$\text{故 } H = (\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad HG = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{则 } A^{10} = GHGH \cdots GH = G(HG)^9 H = G \begin{pmatrix} 1 & -9 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} H = G \begin{pmatrix} 1 & -9 & -10 & 10 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -8 & -9 & 9 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 9 & 10 & -10 \\ -1 & 7 & 8 & -8 \end{pmatrix}.$$



扫描二维码，下载掌上考研

获取完整版真题和资料

